Vogel Fachbuch

Peter Busch

Elementare Regelungstechnik

Allgemeingültige Darstellung ohne höhere Mathematik

VOGEL

Peter Busch
Elementare Regelungstechnik

Peter Busch

Elementare Regelungstechnik

Allgemeingültige Darstellung
ohne höhere Mathematik

7., überarbeitete Auflage

Vogel Buchverlag

PETER BUSCH

Jahrgang 1950. Nach dem Studium an der Technischen Hochschule Darmstadt (u.a. Regelungstechnik) erwarb er das Staatsexamen für das Lehramt an beruflichen Schulen, Fachrichtung Elektrotechnik und Mathematik.
Anschließend war Peter Busch wissenschaftlicher Mitarbeiter der Handwerkskammer Hamburg und wurde Leiter des Fachbereichs Regeltechnik.
Er verantwortete den Aufbau und die Durchführung von verschiedenen Fortbildungskursen im Themenbereich der Regelungstechnik, in deren Rahmen auch dieses Buch entstand.
Seit 1993 ist Peter Busch Studienrat an der Berufsschule in Lüneburg.

Weitere Informationen:
www.vogel-buchverlag.de

ISBN 978-3-8343-3157-1
7. Auflage. 2009

Printed in Germany

Vorwort

In technischen Wissenschaften werden komplizierte Zusammenhänge meistens mit Hilfe der Mathematik erklärt. Dies ist auch in der Regelungstechnik, einer durch die zunehmende Automatisierung an Bedeutung und Einfluß gewinnenden Technik, üblich.

Die meisten Fachbücher über die Grundlagen der Regelungstechnik setzen fundierte Kenntnisse in höherer Mathematik (Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen) voraus.

Anliegen dieses Buches ist es, dem Leser die Zusammenhänge in Regelkreisen verständlich zu machen, ohne daß die mathematischen Betrachtungen zu kompliziert werden. Angesprochen werden soll damit ein breiter Leserkreis, z. B. Schüler und Studierende an beruflichen Gymnasien, Fachschulen (Technikerschulen), Fachhochschulen. Das Buch ist aber auch geeignet für entsprechende Fortbildungsveranstaltungen sowie – dank der zahlreichen Beispiele und Übungsaufgaben mit Lösungen – zum Selbststudium.

Ganz auf die Mathematik zu verzichten, ist nach meiner Meinung nicht der richtige Weg. Diese Methode führt dazu, daß der Leser keine Zusammenhänge erkennt, sondern gezwungen ist, «Rezepte» auswendig zu lernen. Bei der Vielzahl der möglichen Kombinationen von Regler und Strecke ist dies ein aussichtsloses Unterfangen.

Die Regelungstechnik als Wissenschaft ist nicht auf ein Gebiet beschränkt, z. B. auf die Elektrotechnik. Gleichwohl werden in diesem Buch die Grundlagen an einfachen Beispielen aus der Elektrotechnik, z. B. Grundschaltungen von Operationsverstärkern, erarbeitet. Dies hat seine Begründung darin, daß sich über diese Beispiele sehr einfach die komplexe Rechnung einschließlich der Darstellungsmöglichkeiten in der komplexen Ebene oder als Bode-Diagramm erschließen. Dadurch können Berechnungen von Differentialgleichungen vermieden werden. Die gewonnenen Ergebnisse sind allerdings allgemeingültig – unabhängig davon, ob es sich um die Regelung einer elektrischen, mechanischen, hydraulischen oder pneumatischen Größe handelt.

Für Leser, denen Operationsverstärker-Schaltungen nicht vertraut sind, werden die benötigten Grundlagen kurz zusammengefaßt. Wer diese Themen bereits beherrscht, sollte zumindest die angebotenen Übungsaufgaben zur eventuellen Auffrischung des Stoffes bearbeiten. Gleiches gilt für die Kapitel über imaginäre und komplexe Zahlen sowie die Ortskurven-Darstellung in der komplexen Ebene.

Ein gewisses Interesse an der mathematischen Lösung von technischen Problemen muß vorausgesetzt werden. Damit der praktische Aspekt nicht zu kurz kommt, wird nach jeder allgemeinen Betrachtung ein konkretes Beispiel berechnet. Zur Selbstkontrolle werden zusätzlich Übungsaufgaben mit Lösungen angeboten.

Der Leser soll nach Studium des Buches in der Lage sein, eine Regelstrecke nach regelungstechnischen Kriterien zu analysieren und einen dafür passenden Reglertyp auszuwählen und einzustellen.

Bei komplizierten Strecken würde die exakte mathematische Berechnung zu umfangreich. Für diese Fälle wendet man in der Praxis experimentell gewonnene Näherungsverfahren an, die in diesem Buch ebenfalls vorgestellt werden.

Seit der 3. Auflage des Buches ist ein neues Kapitel über *Fuzzy-Logik* und deren Einsatz in der Regelungstechnik enthalten. Dieses Gebiet gewinnt zunehmend an Einfluß; daher bin ich der Meinung, daß dieses Thema inzwischen Teil der «Elementaren Regelungstechnik» geworden ist.

Für die Verbesserungsvorschläge von Lesern möchte ich mich an dieser Stelle sehr herzlich bedanken.

Winsen/Luhe

Peter Busch

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Steuern – Regeln

In der Umgangssprache werden die Begriffe *Steuern* und *Regeln* oftmals sehr unkorrekt verwendet. Deshalb sollen diese Begriffe klar gegeneinander abgegrenzt werden, bevor mit der Betrachtung von regelungstechnischen Vorgängen begonnen wird.

1.1.1 Steuern

DIN 19226 gibt folgende Definition:

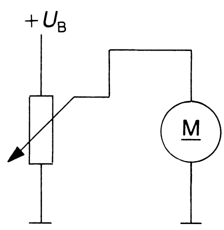
Das Steuern – die Steuerung – ist der Vorgang in einem System, bei dem eine oder mehrere Größen als Eingangsgrößen andere Größen als Ausgangsgrößen aufgrund der dem System eigentümlichen Gesetzmäßigkeiten beeinflussen.

Diese Definition wird an einem einfachen Beispiel erläutert (Bild 1.1). Ein Elektromotor soll mit einer konstanten Drehzahl betrieben werden. Im einfachsten Fall legt man eine konstante Spannung an, wodurch sich der Motor mit einer bestimmten Geschwindigkeit dreht. Verändert man die Spannung, dreht sich der Motor schneller oder langsamer.

Eingangsgröße ist bei diesem Beispiel die Spannung bzw. die Stellung des Potentiometers. Sie beeinflußt die Drehzahl, die die *Ausgangsgröße* darstellt. Die Drehzahl läßt sich also durch die Einstellung des Potentiometers steuern.

Eine Veränderung der Drehzahl durch *Störgrößen* wirkt sich nicht auf die Potentiometerstellung aus. Als Störgröße kann z.B. eine Laständerung oder eine Schwankung der Betriebsspannung wirken. Eine Änderung der Ausgangsgröße wirkt bei einer Steuerung nicht auf die Eingangsgröße zurück.

Bild 1.1 Drehzahlsteuerung



Kennzeichnend für eine Steuerung ist der offene Wirkungsablauf. Störgrößen werden *nicht* ausgeregelt.

1.1.2 Regeln

Auch hierfür zuerst die Definition von *DIN 19226:*

Das Regeln – die Regelung – ist ein Vorgang, bei dem eine Größe, die zu regelnde Größe (Regelgröße), fortlaufend erfaßt, mit einer anderen Größe, der Führungsgröße, verglichen und im Sinne einer Angleichung an die Führungsgröße beeinflußt wird.

Nimmt man bei dem obigen Beispiel einen Drehzahlmesser als Anzeiger und verändert die Potentiometerstellung per Hand derart, daß die Drehzahl auch bei Störungen konstant bleibt, so ergibt sich ein *Regelkreis.*

Der Mensch als *Regler* beobachtet laufend die aktuelle Drehzahl und vergleicht sie mit dem gewünschten Wert (Bild 1.2). Sobald hierbei eine Abweichung auftritt, greift der Mensch in das System ein und gleicht durch Verändern der Potentiometerstellung die tatsächliche Drehzahl der gewünschten Drehzahl an. Bei diesem Beispiel liegt somit eine *Handregelung* vor.

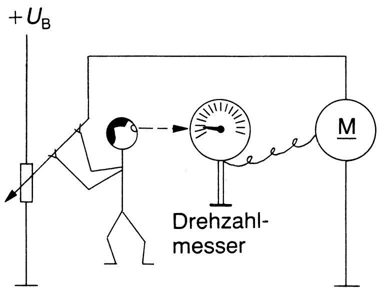


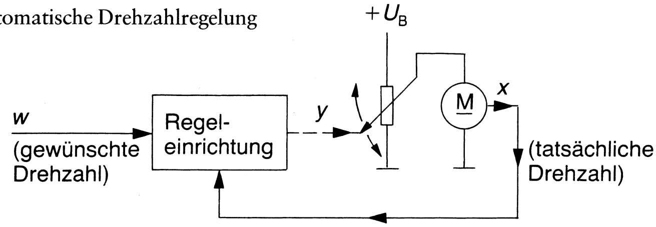
Bild 1.2 Drehzahlregelung, Handregelung

Die gewünschte Drehzahl stellt in regelungstechnischem Begriff die *Führungsgröße w* dar. Ist die Führungsgröße ein konstanter Wert, wird von *Festwertregelung* gesprochen. Im Gegensatz dazu spricht man von *Folge-* oder *Zeitplanregelung,* wenn sich die Führungsgröße ändert. Sie ist dann meistens eine zeitabhängige Funktion, die z.B. durch ein Programm gesteuert wird. Ein allgemein bekanntes Beispiel hierfür ist die Nachtabsenkung bei einer Heizungsregelung, die nachts einen niedrigeren Wert vorgibt als tagsüber. Der Wert der Führungsgröße ist der *Sollwert* x_S.

Die Drehzahl als die zu regelnde Größe heißt *Regelgröße x.* Ihr jeweiliger aktueller Wert wird als *Istwert* x_i bezeichnet.

Um nun zu erreichen, daß die Drehzahl trotz auftretender Störungen konstant bleibt, muß die Regelgröße (tatsächliche Drehzahl) laufend erfaßt und mit der vorgegebenen Führungsgröße (gewünschte Drehzahl) verglichen werden. Dieser Vergleich ist Aufgabe der Regeleinheit, in Bild 1.2 führt ihn der Mensch durch.

Bild 1.3 Automatische Drehzahlregelung



Natürlich kann der Mensch durch eine technische Regeleinrichtung ersetzt werden. Dies ergibt eine *automatische Regelung* (Bild 1.3).

Der Vergleich erfolgt durch Differenzbildung von Regel- und Führungsgröße. Das Ergebnis des Vergleichs ist die *Regeldifferenz* $e = w - x$.

Ist die ermittelte Differenz ungleich Null, dann wird ein entsprechender Befehl, die *Stellgröße y*, an das *Stellglied* gegeben. Im Beispiel ist das Potentiometer das Stellglied, eine Stellgröße verändert somit die Potentiometerstellung. Diese Stellgröße wirkt bei richtiger Wahl des Reglers so lange, bis die Regeldifferenz zu Null geworden ist, also bis Sollwert gleich Istwert ist.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß die meisten Autoren sich bei den Formelzeichen nicht an die seit 1981 gültige DIN 19221 halten. Sie benutzen für die Regeldifferenz anstelle des e als Formelzeichen x_d. Sehr oft wird anstelle der Regeldifferenz auch mit der *Regelabweichung* x_w gearbeitet, die wie folgt definiert wird: $x_w = x - w = -e$.

> Kennzeichnend für eine Regelung ist der Sollwert-Istwert-Vergleich, der laufend in einem geschlossenen Wirkungsweg durchgeführt wird. Bei geeigneter Wahl des Reglers werden Störungen ausgeregelt.

Der Vorgang, der als «Steuern eines Autos» bezeichnet wird, ist nach diesen Definitionen eine Regelung, da der Sollwert (konstanter Abstand vom rechten Fahrbahnrand) ständig mit dem Istwert (aktuelle Position auf der Straße) verglichen wird. Durch Störgrößen bedingte Abweichungen werden vom Fahrer ausgeregelt. Der Fahrer ist also der Regler; als Störgrößen können z.B. Seitenwind, Kurven, verschiedene Fahrbahnverhältnisse o.ä. auftreten.

1.2 Aufgaben des Regelungstechnikers

Der Regelungstechniker hat die Aufgabe, für einen bestimmten Anwendungsfall aus dem großen Angebot von Reglern den geeigneten auszuwählen und optimal einzustellen. Optimal eingestellt ist ein Regler, wenn die Regelgröße bei Störungen möglichst konstant bleibt bzw. möglichst schnell den Sollwert wieder annimmt. Auch bei Änderungen der Führungsgröße soll der Regler in der Art reagieren, daß die Regeldifferenz möglichst schnell wieder zu Null wird.

Um diese Aufgabe lösen zu können, muß der Regelungstechniker fähig sein, das technische Verhalten der Anlage, die geregelt werden soll, mit regelungstechnischen Kriterien zu beschreiben. Außerdem muß er natürlich das Verhalten der verschiedenen Reglertypen kennen und beurteilen können, wie sie zu der zu regelnden Anlage passen.

Da die jeweils zu regelnden Größen unterschiedlichster Natur sind, wurden für die Regelungstechnik eigene Darstellungen geschaffen. Dadurch ist es möglich, regelungstechnische Vorgänge unabhängig von einer speziellen Anwendung zu untersuchen. Egal, ob es sich z.B. um elektrische, mechanische, hydraulische, pneumatische, chemische, biologische Prozesse handelt: alle können mit den Beschreibungsformen der Regelungstechnik behandelt werden.

1.3 Blockschaltbilder

Die genauen Konstruktions- oder Schaltpläne eines Regelsystems sind oft kompliziert und unübersichtlich. Damit der Regelungstechniker für seine Aufgaben überschaubare Pläne erhält, werden die Systeme in Form von *Blockschaltbildern* symbolisiert (Bild 1.4). Jeder Teil des Systems bildet einen Block mit einer *Eingangsgröße* x_e und einer *Ausgangsgröße* x_a. Diese auch Ein- bzw. Ausgangssignale genannten Größen können verschiedener Art sein, z.B. Temperatur, Druck, Länge, Kraft, elektrische Spannung oder Strom usw. Sie werden durch Wirkungslinien dargestellt, deren Pfeilspitzen die Übertragungsrichtung der Signale angeben. Ein solches Regelkreisglied wird *Übertragungsglied* genannt.

In den folgenden Betrachtungen werden x_e und x_a elektrische Größen sein.

Für die Ein- und Ausgangsgrößen von Übertragungsgliedern werden bewußt nicht die Formelzeichen verwendet, die nach DIN 19221 vorgeschrieben sind. Nach dieser Norm ist die Eingangsgröße mit u, die Ausgangsgröße mit v zu bezeichnen. Dies hat sich in der Praxis aber nicht durchgesetzt. Die Mehrzahl der Autoren benutzt die Formelzeichen x_e und x_a. Die Eingangsgröße ist nicht zwangsläufig eine elektrische Spannung, deshalb ist u als Formelzeichen verwirrend.

Zur Kennzeichnung seines Verhaltens wird in einem Block entweder die mathematische Gleichung angegeben, die den Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgröße beschreibt, oder die grafische Darstellung des zeitlichen Verlaufs der Ausgangsgröße bei sprungförmiger Änderung der Eingangsgröße.

Außer diesen Blöcken für die einzelnen Übertragungsglieder werden bei Blockschaltbildern *Additions-* und *Verzweigungsstellen* verwendet.

An einer Additionsstelle treffen mehrere Signale zusammen und werden addiert bzw. subtrahiert (Bild 1.5).

An einer Verzweigungsstelle erfolgt eine Verzweigung des Signals. Hierbei ist zu beachten, daß eine Verzweigungsstelle keine Aufteilung des Signals symbolisiert, wie dies z.B. bei einem Stromknoten in einer elektrischen Schaltung bezüglich des Stromes der Fall ist. Beide Ausgangsgrößen sind dieselben wie die Eingangsgröße (Bild 1.6).

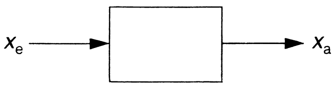


Bild 1.4 Übertragungsglied

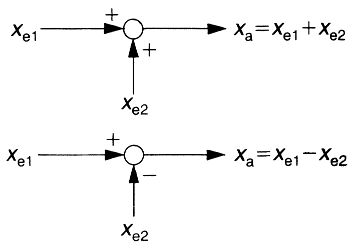


Bild 1.5 Additionsstelle

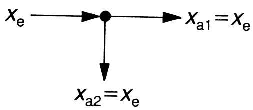


Bild 1.6 Verzweigungsstelle

Unter Verwendung von Blöcken für die einzelnen Übertragungsglieder, Additions- und Verzweigungsstelle kann die Drehzahlregelung als Blockschaltbild gezeichnet werden (Bild 1.7). Diese Darstellung gibt nur die wirkungsmäßigen Zusammenhänge zwischen den Signalen wieder, ohne gerätetechnische Einzelheiten zu berücksichtigen.

Die *Regelstrecke* ist der Teil des Systems, in dem eine physikalische Größe geregelt werden soll. In dem Beispiel der Drehzahlregelung ist dies der Motor, dessen Drehzahl geregelt wird.

Das Stellglied beeinflußt die Regelstrecke in der Art, daß die Regelgröße den gewünschten Wert annimmt und beibehält. Es erhält als Eingangssignal die Stellgröße, die vom Regler aus der Regeldifferenz erzeugt wird. Oft wird das Stellglied auch als Teil des Reglers oder der Strecke angesehen.

Eingangsgröße des Reglers ist die Regeldifferenz e, die die Additionsstelle aus dem Sollwert w und dem mit negativem Vorzeichen rückgekoppelten Istwert $-x$ bildet: $e = w - x$.

Damit die Additionsstelle die Differenz bilden kann, muß der Istwert x_i beim Rückkoppeln invertiert werden, das heißt, sein Vorzeichen muß umgekehrt werden. Die Notwendigkeit dieser *Gegenkopplung* ergibt sich auch anschaulich aus der Forderung, daß eine störungsbedingte Änderung der Regelgröße durch die Regelung abgeschwächt werden soll. Würde die Rückkopplung mit positivem Vorzeichen vorgenommen, ergäbe dies eine *Mitkopplung*, die die Wirkung von Störungen noch verstärken würde.

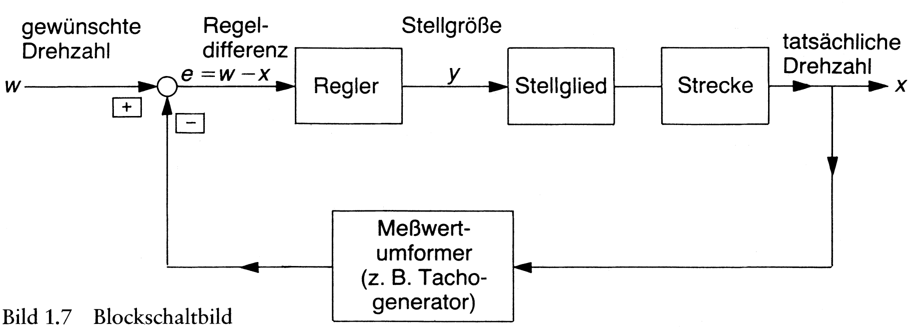


Bild 1.7 Blockschaltbild

Der *Meßwertumformer* formt die Regelgröße vor der Rückkopplung auf den Eingang in eine andere physikalische Größe um, die Drehzahl wird in eine elektrische Spannung umgewandelt. Das erfordert, daß auch der Sollwert eine Spannung ist. Der Regler erhält dann als Eingangssignal die Differenz dieser beiden Spannungen zugeführt, aus der er die Stellgröße y erzeugt. Da elektrische Größen heute sehr einfach weiterverarbeitet werden können, wird die Regelgröße bei der Rückkopplung vorwiegend in elektrische Spannung oder Strom umgewandelt. In diesem Buch werden deshalb Beispiele aus der Elektrotechnik behandelt.

1.4 Einteilung der Regler

Grundsätzlich werden die Regler nach ihren Ein- und Ausgangsgrößen eingeteilt in *digitale* und *analoge* Regler. Bei den analogen Reglern wird noch einmal unterschieden zwischen *stetigen* und *unstetigen* Reglern.

REGLER

DIGITALE REGLER ANALOGE REGLER

STETIGE REGLER UNSTETIGE REGLER

1.4.1 Analoge Regler

Sie verarbeiten analoge Strom- oder Spannungswerte über spezielle elektronische Schaltungen. Wichtigstes Bauteil dieser Schaltungen ist, wie gezeigt wird, der *Operationsverstärker* (kurz OP genannt) in seinen Grundschaltungen als *invertierender* oder *nichtinvertierender Verstärker, Subtrahierer, Integrierer* oder *Differenzierer.* Wegen der Wichtigkeit dieser Grundschaltungen werden sie am Ende dieses Kapitels kurz vorgestellt. Grundkenntnisse über Operationsverstärker werden allerdings hierbei vorausgesetzt!

1.4.1.1 Stetige Regler

Bei den stetigen Reglern kann die Stellgröße als Ausgangssignal jeden Wert zwischen konstruktiv bedingten Endwerten annehmen. Beim OP wird das Ausgangssignal z.B. durch den von der Betriebsspannung bestimmten Aussteuerbereich begrenzt.

1.4.1.2 Unstetige Regler

Bei unstetigen Reglern kann die Stellgröße als Ausgangssignal nur bestimmte feste Werte annehmen. Ein unstetiger Regler mit nur zwei Ausgangszuständen kann z.B. ein- und ausschalten. Bei einer Temperaturregelung kann ein solcher Regler nur entweder die gesamte Heizleistung einschalten oder total abschalten. Zwischenwerte kann er nicht einstellen. Ohne zusätzliche Maßnahmen können an eine solche Regelung natürlich keine hohen Ansprüche bezüglich der Temperaturkonstanz gestellt werden.

Ein unstetiger Regler mit drei Ausgangszuständen kann z. B. zusätzlich zum Ein- und Ausschalten der Heizleistung bei Bedarf noch einen Ventilator betätigen. Damit ergeben sich die drei Zustände: Heizen–Aus–Kühlen. Wird ein Motor angesteuert, so könnten die drei Zustände lauten: Rechtslauf–Stopp–Linkslauf. Es kann damit aber nicht wie mit einem stetigen Regler die Drehzahl des Motors kontinuierlich verändert werden.

1.4.2 Digitale Regler

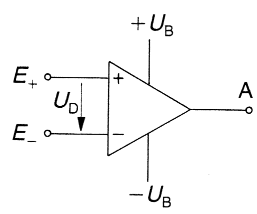
Digitale Regler benötigen ein digitales Eingangssignal. Meistens wird die analoge Eingangsgröße mit einem Analog-Digital-Wandler umgeformt. Aus dem so erzeugten digitalen Eingangssignal errechnet ein *Mikrocomputer* mit dem in ihm gespeicherten Rechenprogramm die Stellgröße. Dieses digitale Ausgangssignal wird mit einem Digital-Analog-Wandler wieder in eine analoge Spannung oder Strom umgewandelt, mit der das Stellglied arbeiten kann.

Die Zusammenhänge der Regelungstechnik gelten sowohl für die analoge als auch die digitale Regelung. Aufgrund des immer einfacheren und preiswerteren Einsatzes von Mikrocomputern gewinnt die digitale Regelung in der Praxis zunehmend an Bedeutung. Da zum Verständnis der digitalen Regelung jedoch die Kenntnis der Zusammenhänge bei Analogreglern unumgänglich ist, soll mit den Grundlagen der analogen Regelungstechnik begonnen werden.

1.5 Grundschaltungen von Operationsverstärkern

Ein Operationsverstärker ist ein Spannungsverstärker in integrierter Form mit zwei Eingängen (E_+ und E_-) und einem Ausgang A. Zwischen dem Eingang E_- und dem Ausgang ergibt sich eine Vorzeichenumkehr, daher wird E_- auch *invertierender Eingang* oder *Minus-Eingang* genannt. Dagegen besteht zwischen E_+ und dem Ausgang keine Vorzeichenumkehr, E_+ heißt deshalb *nichtinvertierender Eingang* oder *Plus-Eingang* (Bild 1.8).

Bild 1.8 Operationsverstärker (OP)



Die beiden Anschlüsse für die symmetrische Betriebsspannung $+U_B$ und $-U_B$ werden bei der Darstellung von OPs in Schaltplänen meistens nicht gezeichnet. Die Betriebsspannungen müssen aber in jedem Fall angeschlossen werden.

Der OP hat eine sehr hohe Leerlaufverstärkung ($V_0 \approx 10 \cdot 10^3 \ldots 100 \cdot 10^3$). Es gilt

$$u_A = V_0 \cdot u_D \quad mit \quad u_D = u_{E+} - u_{E-}.$$

Durch entsprechende externe Beschaltung kann die Verstärkung auf nahezu jeden gewünschten Wert eingestellt werden. Zu beachten ist, daß diese Verstärkung der Gesamtschaltung nicht mit der Leerlaufverstärkung V_0 verwechselt werden darf. Mit solchen Verstärkerschaltungen können sowohl Gleich- als auch Wechselspannungen verstärkt werden.

Mit entsprechender Beschaltung lassen sich mit OPs auch Subtrahierer, Integrierer oder Differenzierer aufbauen.

Die Ausgangsspannung ist bei allen Schaltungen mit OPs – innere Spannungsverluste vernachlässigt – durch die Betriebsspannung U_B begrenzt.

1.5.1 Invertierender Verstärker

Der Verstärker erhält eine Gegenkopplung, das heißt, die Ausgangsspannung wird gegenphasig auf den Eingang zurückgekoppelt. Diese gegenphasige Rückkopplung wird dadurch erzielt, daß auf den Minus-Eingang zurückgekoppelt wird. Die Ausgangsspannung u_A hat einen endlichen Wert, deshalb wird die Differenzspannung u_D wegen der sehr hohen Leerlaufverstärkung V_0 nahezu Null:

$$u_D = \frac{u_A}{V_0} \approx 0$$

Dies bedeutet, daß beide Eingänge des OPs gleiches Potential haben, da zwischen ihnen keine Spannung besteht. Da am E_+-Eingang Nullpotential anliegt, hat auch E_- die Spannung 0 V. Der Knotenpunkt vor dem Eingang E_- wird deshalb auch *virtueller* oder *scheinbarer Nullpunkt* genannt (Bild 1.9).

Damit liegt die Eingangsspannung u_e, die ja von E nach Masse gezählt wird, am Eingangswiderstand R_E an und treibt den Strom i_1. Wegen des hohen Eingangswiderstandes des OPs kann dieser Strom nur durch den Gegenkopplungswiderstand R_G abfließen. Zu beachten ist hierbei, daß der Punkt VN kein wirklicher Masse-

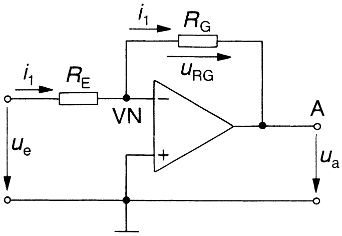


Bild 1.9 OP als invertierender Verstärker

«Anschluß» ist, sondern nur Massepotential hält. Sonst würde natürlich i_1 dort nach Masse abfließen. Also kann i_1 nur durch R_G fließen. Im Widerstand R_G erzeugt er nach dem Ohmschen Gesetz eine Spannung

$$u_{RG} = R_G \cdot i_1;$$

i_1 wird von u_e an R_E erzeugt und kann ebenfalls nach dem Ohmschen Gesetz berechnet werden:

$$i_1 = \frac{u_e}{R_E};$$

damit wird

$$u_{RG} = \frac{R_G}{R_E} \cdot u_e;$$

die Spannung u_{RG} wird von dem Punkt VN, der ja wie gesehen Massepotential hat, nach dem Ausgang A gezählt. Gerade umgekehrt gerichtet ist aber u_a, nämlich von A gegen Masse, so daß gilt: $u_a = -u_{RG}$ oder

$$\boxed{u_a = -\frac{R_G}{R_E} \cdot u_e}$$

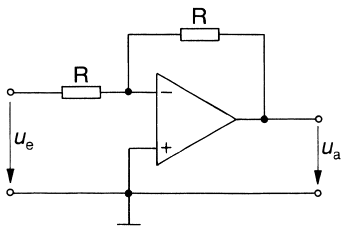
Die Verstärkung zwischen u_e und u_a ist also unabhängig von V_0 nur noch vom Verhältnis der beiden Widerstände R_E und R_G bestimmt:

$$V_u = \frac{u_a}{u_e} = -\frac{R_G}{R_E}$$

Das Minuszeichen deutet auf die Vorzeichenumkehr hin.

Oftmals wird der invertierende Verstärker auch nur zur Vorzeichenumkehr verwendet. Dies läßt sich sehr einfach realisieren, indem die beiden Widerstände den gleichen Wert erhalten. Dann wird $V_u = -1$ und $u_a = -u_e$ (Bild 1.10).

Bild 1.10 OP mit $V_u = -1$



Berechnungsbeispiel

Der Verstärker in Bild 1.11 hat als Eingangsspannung:

a) $U_e = +2\text{ V}$
b) $U_e = -2\text{ V}$

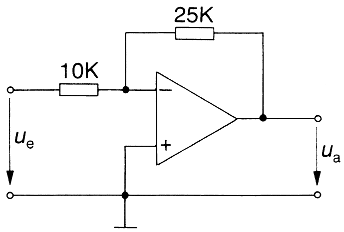


Bild 1.11 OP mit $V_u = -2{,}5$

Berechnen Sie für beide Werte die Ausgangsspannung!

Lösung:

$$V_u = -\frac{R_G}{R_E} = -\frac{25\ \text{k}\Omega}{10\ \text{k}\Omega} = -2{,}5$$

$$U_a = -2{,}5 \cdot U_e$$

a) $U_a = -2{,}5 \cdot (+2\ \text{V}) = -5\ \text{V}$

b) $U_a = -2{,}5 \cdot (-2\ \text{V}) = +5\ \text{V}$;

beachten Sie bei den Ergebnissen die Vorzeichenumkehr zwischen Ein- und Ausgangsspannung.

1.5.2 Nichtinvertierender Verstärker

Auch diese Grundschaltung (Bild 1.12) enthält eine Gegenkopplung. Allerdings wird jetzt die Eingangsspannung am Plus-Eingang angelegt. Wie beim invertierenden Verstärker ist u_D wieder Null, so daß auch bei dieser Schaltung beide Eingänge gleiches Potential haben, allerdings *nicht* Nullpotential. Denn der Eingang E_+ liegt hierbei auf dem Potential von u_e. Damit liegt auch E_- potentialmäßig auf u_e. Die Eingangsspannung u_e fällt somit an R_E ab und treibt einen Strom i_1, der sich nach dem Ohmschen Gesetz ergibt zu

$$i_1 = \frac{u_e}{R_E}$$

Dieser Strom i_1 fließt auch durch R_G (Eingangsstrom des OPs ist Null wegen seines hohen Eingangswiderstandes) und erzeugt dort die Spannung $u_{RG} = R_G \cdot i_1$. Mit der obigen Beziehung für i_1 wird daraus

$$u_{RG} = \frac{R_G}{R_E} \cdot u_e.$$

Die Ausgangsspannung u_a wird von A gegen Masse gezählt. Bei einem Spannungsumlauf über die beiden Widerstände ergibt sich nach dem Kirchhoffschen Gesetz $u_a = u_{RE} + u_{RG}$ oder mit $u_{RE} = u_e$ und u_{RG} wie oben

$$u_a = u_e + \frac{R_G}{R_E} \cdot u_e;$$

nach Ausklammern von u_e wird daraus

$$\boxed{u_a = \left(1 + \frac{R_G}{R_E}\right) \cdot u_e}$$

Auch bei dieser Schaltung hängt V_u nur von den Widerständen R_G und R_E ab. Es gibt keine Vorzeichenumkehr:

$$V_u = \frac{u_a}{u_e} = 1 + \frac{R_G}{R_E}$$

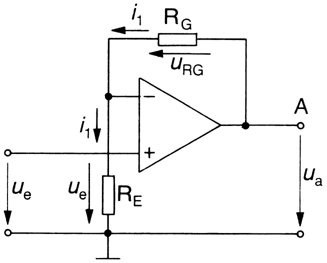


Bild 1.12
OP als nichtinvertierender Verstärker

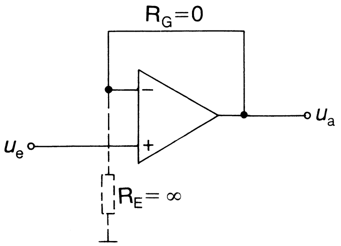


Bild 1.13
OP als Impedanzwandler

1.5.2.1 Impedanzwandler

Eine spezielle Variante des nichtinvertierenden Verstärkers ergibt sich, wenn der Eingangswiderstand R_E unendlich groß und der Gegenkopplungswiderstand R_G Null gewählt wird (Bild 1.13). Dann wird die Verstärkung

$$V_u = 1 + \frac{0}{\infty} = 1$$

Dadurch ist die Ausgangsspannung gleich der Eingangsspannung: $u_a = u_e$. Als Verstärker ist diese Schaltung demnach nicht einsetzbar. Ihr Vorteil liegt in dem hohen Eingangswiderstand und dem niedrigen Ausgangswiderstand der Schaltung. Ein solcher Impedanzwandler wird zur Entkopplung von mehrstufigen Schaltungen genommen, damit sich die einzelnen Teile nicht gegenseitig beeinflussen.

1.5.3 Subtrahierer

Eine Kombination von invertierendem und nichtinvertierendem Verstärker ist der Subtrahierer (Bild 1.14). Er wird hier nicht so ausführlich behandelt wie diese beiden Verstärkerschaltungen. Am einfachsten werden die Zusammenhänge zwischen den beiden Eingangsspannungen und der Ausgangsspannung, wenn alle vier Widerstände den gleichen Widerstandswert haben. Dann gilt:

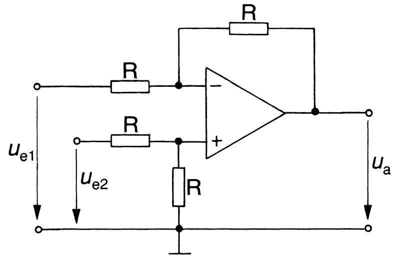


Bild 1.14 OP als Subtrahierer

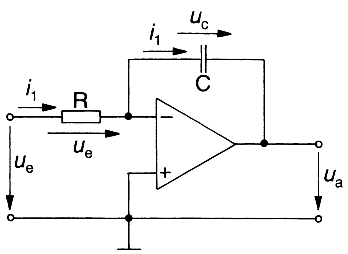


Bild 1.15 OP als Integrierer

$$u_a = u_{e2} - u_{e1}$$

1.5.4 Integrierer

Wird bei einem invertierenden Verstärker der Gegenkopplungswiderstand durch einen Kondensator ersetzt, ergibt die Schaltung einen Integrierer. Eine Gleichspannung der Größe $\hat{u}_e$ treibt einen konstanten Strom i_1 durch den Eingangswiderstand, da wieder gilt, daß $u_D \approx 0$ (Bild 1.15).

Mit diesem konstanten Strom wird der Kondensator im Gegenkopplungszweig aufgeladen (Eingangsstrom des OPs ist Null). Wird ein Kondensator mit konstantem Strom geladen, steigt die Kondensatorspannung linear an. War der Kondensator vor Anlegen der Eingangsspannung ungeladen, beginnt die Kondensatorspannung bei Null anzusteigen. Die Kondensatorspannung u_C ändert sich pro Zeiteinheit Δt um

$$\Delta u_C = \frac{1}{C} \cdot i_1 \cdot \Delta t.$$

Mit

$$i_1 = \frac{\hat{u}_e}{R}$$

wird daraus

$$\Delta u_C = \frac{\hat{u}_e}{R \cdot C} \cdot \Delta t$$

Damit läßt sich berechnen, um welche Spannung Δu_C sich die Kondensatorspannung während der Zeitdifferenz Δt ändert.

Ist der Kondensator vor Einschalten der Eingangsspannung bereits auf eine Spannung U_0 aufgeladen, berechnet sich der Spannungswert nach der Zeit Δt aus der Summe

$$u_C = \Delta u_C + U_0$$

$$u_C = \frac{\hat{u}_e}{R \cdot C} \cdot \Delta t + U_0$$

Die bereits am Anfang vorhandene Spannung U_0 wird *Anfangswert* genannt. Diese Beziehung gilt aber nur, wenn u_e eine Gleichspannung ist!

Entsprechend der Überlegung beim invertierenden Verstärker gilt auch hier wieder $u_a = -u_C$.

Damit wird

$$\boxed{u_a = -\left(\frac{\hat{u}_e}{R \cdot C} \cdot \Delta t + U_0\right)}$$

Auch diese Beziehung ist nur gültig, wenn u_e eine Gleichspannung ist!

Damit ergeben sich für u_a und u_C die nebenstehenden qualitativen Verläufe (Bild 1.16). Sie erinnern an das Integrieren, eine Methode der höheren Mathematik zur Flächenberechnung. Daher hat diese Grundschaltung des OPs ihren Namen.

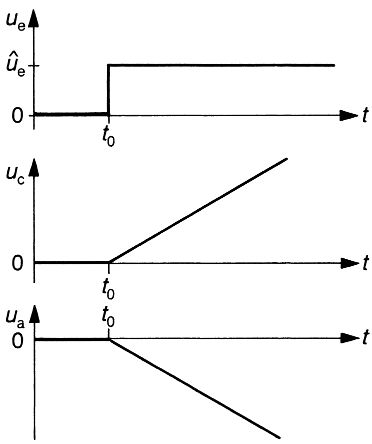


Bild 1.16 Spannungsverläufe beim Integrierer, wenn $U_0 = 0$

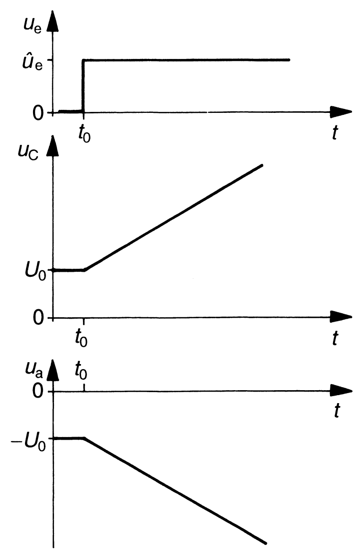


Bild 1.17 Spannungsverläufe beim Integrierer, wenn $U_0 \neq 0$

Berechnungsbeispiel

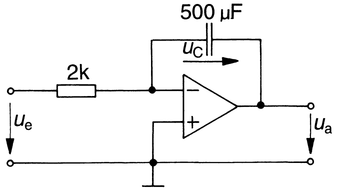


Bild 1.18

An den Eingang der OP-Schaltung (Bild 1.18) wird zur Zeit $t = 0$ eine Gleichspannung mit $\hat{u}_e = 1{,}6$ V angelegt. Der Kondensator ist zur Zeit $t = 0$ auf eine Spannung $U_0 = 1{,}2$ V aufgeladen. Bestimmen Sie die Verläufe der Spannungen u_C und u_a!

Lösung: $u_C = \Delta u_C + U_0$

1. $t = 0$; da $\Delta t = 0 \Longrightarrow \Delta u_C = 0 \Longrightarrow u_C = U_0 = 1{,}2$ V
   $u_a = -u_C \Longrightarrow u_a = -1{,}2$ V

2. $t = 1$ s; $\Delta t_1 = 1$ s $\Longrightarrow \Delta u_C = \dfrac{1{,}6\ \text{V}}{2\ \text{k}\Omega \cdot 500\ \mu\text{F}} \cdot 1$ s; $\Delta u_C = 1{,}6$ V

   u_C (1 s) $= 1{,}6$ V $+ 1{,}2$ V; $u_C = 2{,}8$ V
   u_a (1 s) $= -2{,}8$ V

3. $t = 2$ s; *Entweder:* $\Delta t_2 = 2$ s und $U_0 = 1{,}2$ V

   $$\Delta u_C = \frac{1{,}6\ \text{V}}{2\ \text{k}\Omega \cdot 500\ \mu\text{F}} \cdot 2\ \text{s};\ \Delta u_C = 3{,}2\ \text{V}$$

   u_C (2 s) $= 3{,}2$ V $+ 1{,}2$ V; u_C (2 s) $= 4{,}4$ V
   u_a (2 s) $= -4{,}4$ V

   Oder: $\Delta t_3 = 2$ s $- 1$ s $= 1$ s und $U_{01} = u_C$ (1 s) $= 2{,}8$ V

Beachten Sie hierbei den neuen Anfangswert U_{01}! Betrachtet wird die Zeitspanne von 1 s bis 2 s. Anfangswert ist jetzt die Spannung, die der Kondensator am Anfang dieser Zeitspanne Δt (also bei $t = 1$ s) hat!

$$\Delta u_C = \frac{1{,}6\ \text{V}}{2\ \text{k}\Omega \cdot 500\ \mu\text{F}} \cdot 1\ \text{s};\ \Delta u_C = 1{,}6\ \text{V}$$

u_C (2 s) $= 1{,}6$ V $+ 2{,}8$ V; u_C (2 s) $= 4{,}4$ V
u_a (2 s) $= -4{,}4$ V

Die Werte sind in Bild 1.19 zu finden.

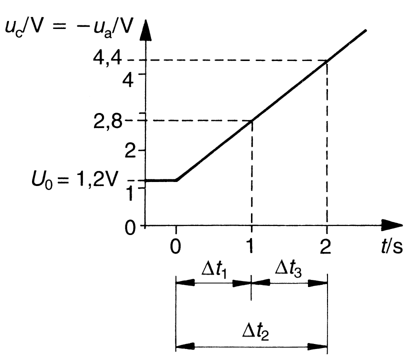


Bild 1.19

1.5.5 Differenzierer

Wird beim invertierenden Verstärker der Eingangswiderstand durch einen Kondensator ersetzt, wird daraus ein Differenzierer (Bild 1.20). Ausgegangen wird bei den folgenden Betrachtungen zuerst von einem idealen Differenzierer. Dabei wird angenommen, daß der Generator zur Erzeugung von u_e keinen Innenwiderstand hat ($R_i = 0$); außerdem werden die Leitungen als widerstandslos angesehen. Der Kondensator sei vor dem Einschalten der Gleichspannung u_e ungeladen. Dann lädt er sich beim Einschalten in unendlich kurzer Zeit auf durch einen unendlich großen Strom i_1, der im Einschaltmoment fließt. Ist der Kondensator aufgeladen, fließt kein Strom mehr. Der gleiche unendlich große impulsförmige Strom fließt wieder durch R und erzeugt dort eine Spannung, die den gleichen Verlauf hat wie der Strom. Die Ausgangsspannung u_a ist wieder dieser Spannung entgegen gerichtet, wie den Zeichnungen zu entnehmen ist, die die qualitativen Verläufe dieser Spannungen und des Stromes zeigen (Bild 1.21).

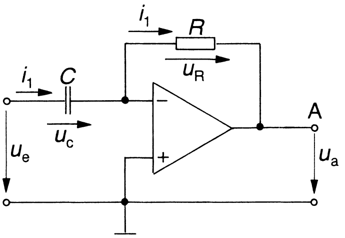


Bild 1.20 OP als idealer Differenzierer

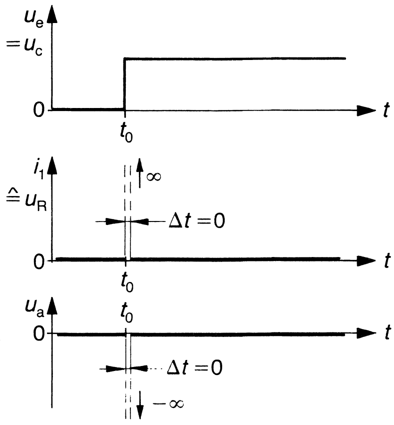


Bild 1.21 Konstante Eingangsspannung am idealen Differenzierer

Dieser eigenartige Verlauf läßt sich auch mathematisch herleiten. Die Spannung am Kondensator ist die Eingangsspannung, somit läßt sich i_1 bestimmen:

$$i_1 = C \cdot \frac{\Delta u_e}{\Delta t};$$

bzw. mit

$$u_a = -R \cdot i_1$$

wird

$$\boxed{u_a = -R \cdot C \cdot \frac{\Delta u_e}{\Delta t}}$$

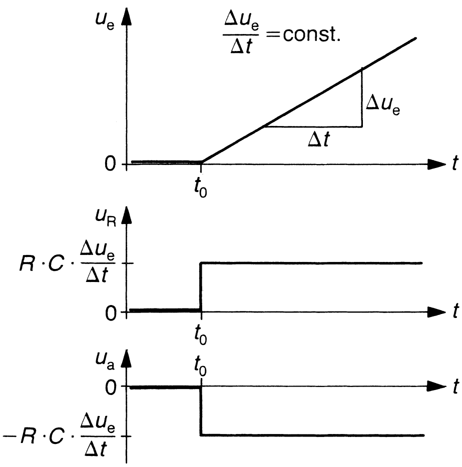


Bild 1.22 Lineare Eingangsspannung am idealen Differenzierer

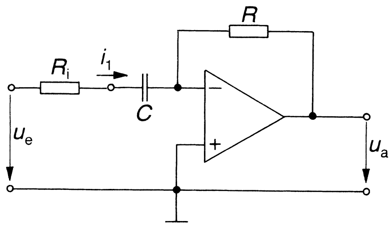


Bild 1.23 OP als realer Differenzierer

Diese Beziehungen sagen aus, daß i_1 und u_a jeweils proportional zur Steigung $\Delta u_e/\Delta t$ der angelegten Eingangsspannung sind. Diese Steigung der Spannung ist aber zu allen Zeiten Null außer dem Zeitpunkt t_0. In diesem Einschaltmoment t_0 ist die Steigung unendlich groß.

Weil die Ausgangsspannung u_a proportional zur Steigung der Eingangsspannung u_e ist, wird diese Schaltung Differenzierer genannt nach einem mathematischen Verfahren zur Berechnung der Steigung von Kurven, der Differentialrechnung.

Wird ein Differenzierer mit einer linear ansteigenden Spannung angeregt, hat seine Ausgangsspannung einen konstanten Wert, da bei einem solchen Verlauf die Steigung überall konstant ist (Bild 1.22).

Diese Betrachtungen sind insofern unrealistisch, als es keine Generatoren ohne Innenwiderstand und keine verlustlosen Leitungen gibt. Außerdem gibt es in der Praxis natürlich keine unendlichen Größen. Bei einem realen Differenzierer werden die ohmschen Verlustwiderstände berücksichtigt. Der Widerstand R_i stellt den Innenwiderstand des Generators und den Drahtwiderstand der Leitungen dar (Bild 1.23). Durch diesen R_i wird der Einschaltstrom begrenzt auf

$$i_{1\max} = \frac{\hat{u}_e}{R_i},$$

und es gilt nach der bekannten Funktion für den Ladestrom eines Kondensators, der über einen Widerstand aufgeladen wird:

$$i_1 = i_{1\max} \cdot e^{-\frac{t}{R_i \cdot C}}$$

Mit der obigen Beziehung für $i_{1\max}$ und $u_a = -R \cdot i_1$ wird

$$u_a = -\frac{R}{R_i} \cdot \hat{u}_e \cdot e^{-\frac{t}{R_i \cdot C}}$$

Die Verläufe von i_1 und u_a sind in Bild 1.24 dargestellt.

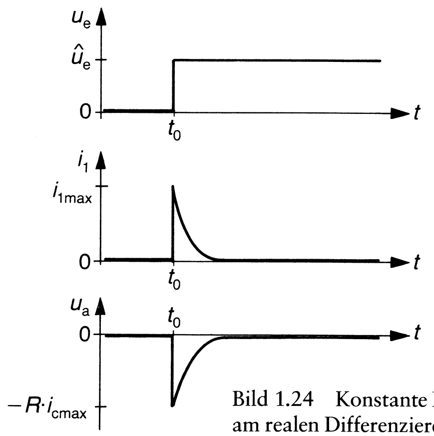


Bild 1.24 Konstante Eingangsspannung am realen Differenzierer

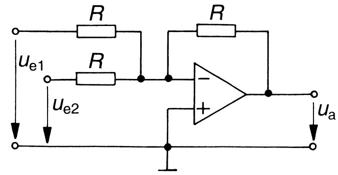


Bild 1.25 OP als Addierer

1.5.6 Addierer

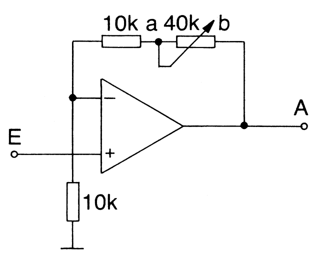
Aus einem invertierenden Verstärker mit OP läßt sich durch parallelgeschaltete zusätzliche Eingangswiderstände ein Addierer aufbauen, wie Bild 1.25 für zwei Eingangsspannungen zeigt.

Besonders einfach wird die Berechnung, wenn alle Widerstände den gleichen Widerstandswert haben. Dann gilt:

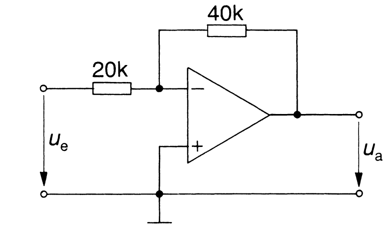
$$\boxed{u_a = -(u_{e1} + u_{e2})}$$

Übung 1

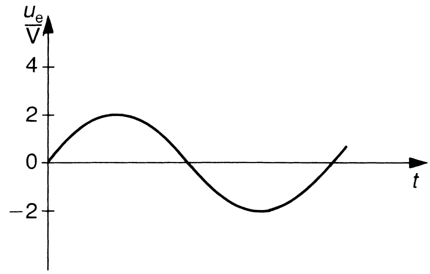
In welchen Grenzen kann die Spannungsverstärkung des nebenstehenden Verstärkers verändert werden?



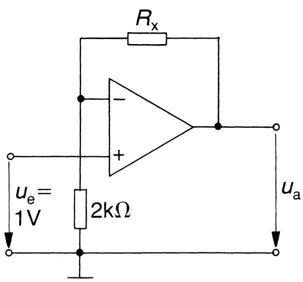
Übung 2



Der nebenstehende Verstärker wird mit einer sinusförmigen Spannung ($\hat{u}_e = 2$ V; $f = 500$ Hz) angeregt. Ermitteln Sie die Ausgangsspannung u_a und zeichnen ihren Zeitverlauf phasenrichtig zu u_e in das Diagramm.

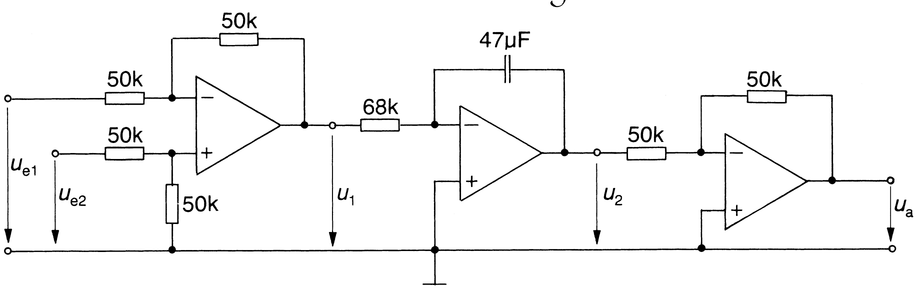


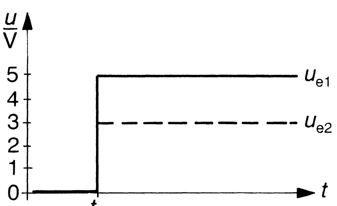
Übung 3



Bestimmen Sie für die nebenstehende Schaltung R_x so, daß gilt: $u_a = +6$ V.

Übung 4





Drei OPs sind zu einer Schaltung kombiniert. In nebenstehender Zeichnung sind die Zeitverläufe der beiden Eingangsspannungen dargestellt. Der Kondensator ist vor dem Einschaltmoment t_0 auf die Spannung $U_0 = 2$ V aufgeladen. Ermitteln Sie den Zeitverlauf der Ausgangsspannung.